

K řešení následujících příkladů můžete použít vše, co bylo na přednášce či cvičení, pokud není explicitně v zadání řečeno jinak. Speciálně můžete používat i různé verze věty o limitě složené funkce pro jednostranné limity, jak bylo ukázáno na cvičení a v domácím úkolu (pozor na správné předpoklady v takových případech).

Můžete používat bez důkazu všechny vzorce pro goniometrické funkce a také všechny probírané nerovnosti.

**Důsledně explicitně uvádějte každé použití věty a vždy ověřujte předpoklady vět, svůj postup stručně, ale pečlivě odůvodňujte!** Jedinou výjimku tvoří předpoklady, kdy je potřeba, aby nějaká funkce byla definována na nějakém okolí nějakého bodu. Takovéto předpoklady jako jediné smíte přejít mlčením. Pokud je ověření předpokladů trivialita (častý případ), napište alespoň, že je tento předpoklad splněn, abych věděl, že jste na žádný předpoklad nezapomněli.

1. Vypočtete (nebo dokažte, že neexistují) následující limity **bez použití l'Hospitalova pravidla**:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + 2^x) \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x \ln a) \cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}\right)$ ; kde  $a > 1$  je parametr

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \sin x}{1 + \sin 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. Vypočtete (nebo dokažte, že neexistují) následující limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^{\frac{1}{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\cotg x)^{\sin x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x^x-1)}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

3. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci následujících řad:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 + 5n}{n^3 + 1}\right)$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \left(e^{\sin^2(\pi/n)} - \cos(\pi/n)\right)$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}\right)\right)$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg}^{\beta}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ ; kde  $\beta > 0$  je parametr